PROPAGANDA D'ISTRUZIONE
BIBLIOTECA DEL POPOLO
CENTESIMI 90 IL VOLUME
CATULLO RÙCERI
CURIOSITÀ
E
SOFISMI MATEMATICI
OGNI VOLUME
90
CENTESIMI
Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza
EDITRICE SONZOGNO
PASQUIROLO 14
MILANO
BATTAGLINI

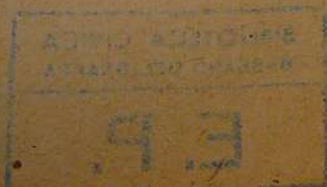
AVVERTENZA

Il presente trattato raccoglie le principali curiosità matematiche e alcuni sofismi.

Dato il carattere essenzialmente popolare della trattazione, curammo solamente la parte aritmetica, geometrica ed algebrica, ed a titolo di maggior nozione, coordinammo i diversi sofismi con qualche schiarimento opportuno quando non fosse del tutto appariscente il vizio di logica.

Trattammo anche dei metodi classici d'approssimazione per la quadratura del circolo, problema dimostrato irresolubile con i mezzi ordinari, ma che anche oggi appassiona la mente di molti.

CURIOSITÀ E SOFISMI MATEMATICI

I.

ARITMETICA

1. La numerazione binaria.

Partendo dagli elementi d'ogni computo semplice, osserviamo come ci si presenterebbe una numerazione che avesse per base il numero 2 anzichè l'*uno*. Adottiamo in altri termini un sistema di numerazione in cui si debbano scrivere le cifre con i numeri *uno* e *zero* con la stessa convenzione che si usa nel sistema decimale, e cioè: ogni cifra posta immediatamente a sinistra rappresenta unità due volte maggiore. Abbiamo in altri termini ciò che si chiama *numerazione binaria*.

Scriviamo i primi numeri di tale numerazione, ponendo ad essi vicini i numeri del nostro sistema comune, ed avremo il seguente quadro:

1	1	9	1001	17	10 001
2	10	10	1010	18	10 010
3	11	11	1011	19	10 011
4	100	12	1100	20	10 100
5	101	13	1101	21	10 101
6	110	14	1110	22	10 110
7	111	15	1111	23	10 111
8	1000	16	10 000	24	11 000

Osservando tale quadro si scorge subito che un numero qualunque si ottiene addizionando i numeri

1, 2, 4, 8, 16, 32

i quali altro non son che le potenze del numero *due*.

È evidente che con tale regola si possa continuare il nostro quadro indefinitamente. Ma per non dilungarci e per mostrare subito una curiosa applicazione della numerazione binaria, compiliamo il seguente quadro:

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	20	20	18	17
25	21	21	19	19
26	22	22	22	21
27	23	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Ed ecco in che modo: formiamo una prima colonna di numeri comuni scelti nel quadro della numerazione binaria, in modo che essi ordinatamente corrispondano a quelli la cui ultima cifra a destra è l'unità. Infatti dal primo quadro

risulta che i numeri nostri 1, 3, 5, 7, 9, 11, ecc., corrispondenti ai 1, 11, 101, 111, 1011, ecc., sono quelli richiesti.
Scriviamo poi in una seconda colonna tutti i numeri naturali che nel quadro della numerazione binaria corrispondono a numeri aventi per seconda cifra, partendo da destra, l'unità. In una terza colonna, tutti i numeri naturali corrispondenti a cifre della numerazione binaria la cui terza a partire da destra sia l'unità. E limitiamo il nostro quadro alla quinta colonna. Nel quadro così costituito abbiamo le così dette *colonne o tavole misteriose* le quali servono a indovinare un numero pensato da una persona.

Ed ecco in qual modo: usando le cinque colonne da noi riportate, si proponga ad un tizio di pensare un numero compreso fra l'1 ed il 31, e d'indicarci in quali colonne esso si trovi.

Si scriva allora di seguito partendo da destra e andando verso sinistra un *1* per ciascuna delle colonne in cui il numero si trova, ed uno *0* per le colonne in cui il numero non esiste. Avrete così una cifra nel sistema di numerazione binaria che vi farà subito conoscere la corrispondente pensata. Così, ad esempio, il numero pensato sia il 14 che trovasi nella seconda, terza e quarta colonna. Allora scrivendo zero per la prima e tre unità successive per le tre colonne in cui il 14 trovasi, abbiamo la cifra *1110* che nella numerazione binaria corrisponde proprio al *14*.

2. I NUMERI TRIANGOLARI.

Questi numeri e quelli di cui diremo subito nel presente titolo, vennero imaginati da antico, ed il calcolo di essi venne praticamente utilizzato dagli artiglieri che nelle fortezze accumulavano in strati regolari i proiettili sferici.

Per *numeri triangolari* si debbono appunto intendere quei

numeri formati nel modo indicato dalla fig. 1 per continua e regolare sovrapposizione.

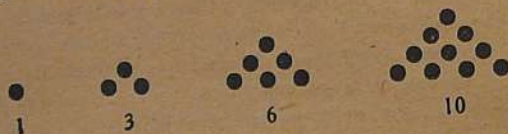



Fig. 1.

Dalla figura si nota subito il modo di formazione dei numeri triangolari, poichè ognuno di essi è costituito dal numero occupato nella serie dei numeri naturali aumentato della somma di tutti i numeri che precedono il numero in questione.

Per ottenere tutta la serie dei numeri triangolari basterà usare il seguente quadro.

Unità .	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Intieri .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Da questo si vede che ogni numero triangolare, per esempio, il *36* è eguale alla somma del suo precedente *28*, col suo superiore *6*.

Quando siansi scritti con notevole sufficienza numeri della serie triangolare si provi il lettore a notare le seguenti verità:

1.° ogni quadrato impari è sempre eguale alla differenza di due numeri triangolari;

2.° ogni cubo è sempre eguale alla differenza di due numeri triangolari consecutivi;

3.° la somma di due triangolari successivi è un quadrato.

D'altra parte, per riconoscere le affermazioni precedenti possiamo valerci della fig. 2 nella quale un quadrato venne

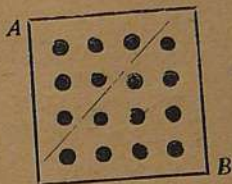



Fig. 2.

diviso in due parti A e B contenenti rispettivamente i due numeri triangolari successivi 6 e 10.

Infatti:

1.° un quadrato impari, per esempio il 9, è eguale alla differenza fra i triangolari 10 e 1;

2.° un cubo, per esempio l'8, è eguale alla differenza fra i triangolari successivi 36 e 28;

3.° che la somma di due triangolari successivi sia un quadrato è cosa appariscente dalla figura in cui sono sommati i successivi triangolari 6 e 10 che danno 16 quadrato di 4.

3. I NUMERI QUADRATICI.

Quando si prenda come base geometrica la figura del quadrato, noi potremo con metodo analogo al precedente, formare i numeri quadratici.

Osservando la fig. 3, dove abbiamo schematicamente riprodotto i primi quattro numeri quadratici, si vede che ogni numero differisce dal precedente per un *numero dispari* di

unità le quali costituiscono la serie dei numeri dispari naturali.

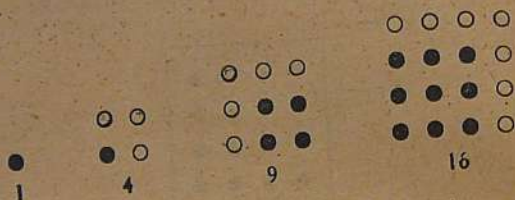



Fig. 3.

D'altra parte, a simiglianza dei numeri triangolari, possiamo costituire un quadro che può darci, con continuità, tutta la serie dei numeri quadratici. Ed ecco:

Base . .	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Dispari. .	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Quadratici.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

in qual modo: un numero quadratico qualsivoglia, per esempio il 25, è uguale al suo precedente 16, aumentato dal suo superiore 9.

I numeri triangolari e quadrati ci sono fra loro uniti dal celebre *Teorema di Diofanto* che si esprime dicendo che: *l'ottuplo di un numero triangolare aumentato di 1, è sempre un numero quadratico.*

Per convincersi di questo, si prenda un numero triangolare qualsivoglia, per esempio il *10*, il suo ottuplo 80, aumentato di 1 da appunto *81* che è un numero quadratico.

Questo teorema può esprimersi anche col suo reciproco: *ogni quadrato di un numero dispari diminuito di un'unità, è l'ottuplo di un numero triangolare.*

Si prenda un numero dispari qualunque, per esempio il 5, e se ne faccia il quadrato: 25. Si diminuisca questo di 1 e *24* è precisamente l'ottuplo del numero triangolare 3.

4. I NUMERI PIRAMIDALI.

Se nella fig. 1 imaginiamo che i cerchietti rappresentanti idealmente i numeri triangolari siano delle sfere, noi da essi possiamo passare alla costruzione dei numeri piramidali.

Imaginiamo quindi di avere tre sfere, tre proiettili disposti l'un presso l'altro come nel numero triangolare 3. Si prenda il proiettile che rappresenta il numero 1 e lo si sovrapponga ai 3. Abbiamo così due strati di proiettili che nel loro complesso sono *4*. Ma se noi sovrapponiamo questi due strati ad uno già in precedenza disposto a simiglianza del numer otriangolare *6*, noi abbiamo una piramide di proiettili costituita da 3 strati i quali hanno rispettivamente 6, 3 e 1 proiettili: nell'insieme dunque *10* proiettili.

Abbiamo così materialmente trovati i numeri *1, 4, 10* che per la disposizione costruttiva si dicono *numeri piramidali*.

Per quanto abbiamo detto è facile vedere come possano costruirsi i numeri piramidali successivi a quelli già trovati, poichè dal quadro

Unità . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Piramidali.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

si nota come al solito che un numero piramidale qualsivoglia, per esempio il *35*, è eguale alla somma del suo precedente *20*, col suo superiore triangolare *15*.

Questi numeri piramidali hanno tutti una base triangolare ed ogni loro strato è evidentemente costituito da numeri triangolari. Per tal motivo diconsi *piramidali triangolari*, per distinguerli da quelli che si potrebbero ottenere prendendo una base quadrata, pentagonale, ecc., vale a dire costruendo piramidi ideografiche con numeri quadratici, pentagonali, ecc.

5. NUMERI CURIOSI.

Il 37. — Si prenda la progressione aritmetica di ragione 3

÷ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ecc... 27

e si moltiplichi ciascun termine di questa progressione per 37 Otterremo

111, 222, 333, 444, 555, ecc.., 999

Esiste qui una doppia curiosità: anzitutto i prodotti che otteniamo sono costituiti da tre cifre identiche, ed in secondo luogo un prodotto qualsivoglia, per esempio il 444, che deriva dal 12, è costituito in modo che la somma delle sue cifre è proprio eguale a 12, come il 555 che deriva dal 15 è costituito da tre cifre le quali sommate danno precisamente 15.

Questo si verifica perchè il 37 è il solo numero di due cifre che moltiplicato per la somma delle sue cifre, dà un prodotto eguale alla somma dei cubi delle cifre stesse. E per esprimerci aritmeticamente:

$$37 \times (3+7) = 370$$

$$3^3 + 7^3 = 27 + 374 = 370.$$

Il numero 45. — Si osservi il numero

987654321

formato dai primi nove numeri naturali scritti in ordine inverso, ed il numero

123456789

costituito invece dai primi nove numeri naturali in ordine progressivo.

Facendo la differenza fra questi due numeri, otteniamo:1

$$\begin{array}{r} 987654321 - \\ 123456789 = \\ \hline 864197532 \end{array}$$

vale a dire un numero di nove cifre tutte diverse l'una dall'altra, ma che formano un numero identico ai precedenti dove è stata fatta qualche posposizione.

Facendo la somma delle cifre del numero sottraendo, o del minuendo, o del resto, noi otteniamo sempre 45. E questo perchè tale numero si può scomporre in quattro numeri: 8, 12, 5, 20 tali che

$$8 + 2 = 10$$
$$12 - 2 = 10$$
$$5 \times 2 = 10$$
$$20 : 2 = 10$$

Il numero 100. — È curioso e forse anche più del 45. Esso infatti risulta dalla somma dei numeri 12, 20, 4, 64, i quali con le quattro operazioni aritmetiche danno:

$$12 + 4 = 16$$
$$20 - 4 = 16$$
$$4 \times 4 = 16$$
$$64 : 4 = 16$$

D'altra parte noi possiamo *scrivere il numero 100 in quattro modi diversi usando 5 volte la stessa cifra così:*

$$100 = 111 - 11$$
$$100 = 3 \times 33 + \frac{3}{3}$$
$$100 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5$$
$$100 = 5 \times (5 + 5 + 5 + 5)$$

Possiamo anche *scrivere il numero 100* usando tutte le

prime 9 cifre dei numeri naturali, senza ripeterne mai alcuno, nei seguenti modi diversi:

$$100 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

$$100 = 74+25+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$$

$$100 = 98+1+\frac{3}{6}+\frac{27}{54}$$

$$100 = 95+4+\frac{38}{76}+\frac{1}{2}$$

$$100 = 91+\frac{5742}{638}$$

$$100 = 94+\frac{1578}{263}$$

$$100 = 96+\frac{2148}{537}$$

$$100 = 91+\frac{7524}{836}$$

$$100 = 91+\frac{5823}{647}$$

$$100 = 96+\frac{1428}{357}$$

$$100 = 96+\frac{1752}{438}$$

Il numero 142857. — Moltiplichiamo questo numero curioso per 1, 2, 3, 4, 5, 6, vale a dire costituiamo i primi sei multipli del numero. Abbiamo i numeri:

142857	428571	714285
285714	571428	857142

i quali sono tutti composti dalle medesime cifre qua e là spostate. Ognuno di questi numeri, per esempio il 571428, è costituito da gruppi di due cifre: 57, 14, 28 ognuno dei quali è un multiplo pari di 7 o aumentato dell'unità; così:

$$57 = 7 \times 8 + 1$$

$$14 = 7 \times 2$$

$$28 = 7 \times 4.$$

Ma il numero 142857 è curioso anche perchè moltiplicato per 326451 dà:

```
      142857 ×
      326451 =
      ------
      142857
     714285
    571428
   857142
  285714
 428571
-----------
46635810507
```

importante non per il risultato, ma per il fatto che *tutte le cifre delle colonne verticali sono identiche.*

Il numero 12345679. — È formato ordinatamente da tutte le cifre naturali escluso l'8.

Si consideri la progressione aritmetica di ragione 9

$$\div\ 9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81$$

Moltiplicando il nostro numero curioso per ciascuno dei termini della progressione suddetta, noi abbiamo:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 36 = 444444444$$
$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

nove numeri costituiti ciascuno da 9 cifre identiche.

La curiosità d'un numero qualunque. — Si prenda un numero qualsivoglia, per esempio l'86753 e si scriva nuova-

mente sotto lo stesso ponendone la prima cifra sotto la quarta, così, e si sommi:

$$\begin{array}{r} 86753 \\ 86753 \\ \hline 86839753 \end{array}$$

Il risultato della somma lo si divida successivamente per 7, per 11 e per 13 ed avremo:

$$86839753 : 7 = 12405679$$

il risultato lo si divida per 11, cioè:

$$12405679 : 11 = 1127789$$

il nuovo risultato lo si divida per 13 e si otterrà:

$$1127789 : 13 = 86753$$

vale a dire il numero dal quale eravamo partiti.

6. Prodotti singolari.

Vi sono alcuni prodotti nei quali *la somma delle cifre eguaglia quella delle cifre dei fattori*. Ecco alcuni esempi tra i moltissimi:

$$51 \times 84 = 4284$$

ed in esso

$$5 + 1 + 8 + 4 = 4 + 2 + 8 + 4$$

$$41 \times 89 = 3649$$

ed in esso

$$4 + 1 + 8 + 9 = 3 + 6 + 4 + 9$$

$$42 \times 84 = 3528$$

ed in esso

$$4 + 2 + 8 + 4 = 3 + 5 + 2 + 8$$

$$51 \times 75 = 3825$$

ed in esso

$$5 + 1 + 7 + 5 = 3 + 8 + 2 + 5$$

$$33 \times 75 = 2475$$

ed in esso $$3+3+7+5=2+4+7+5$$

Altri prodotti singolari sono invece *costituiti* dalle stesse cifre dei fattori. Eccone alcuni:

$$21 \times 87 = 1827$$
$$27 \times 81 = 2187$$
$$35 \times 41 = 1435$$
$$15 \times 93 = 1395$$
$$381 \times 969 = 369189$$
$$255 \times 807 = 208755$$

Ma singolarissimi fra i singolari sono i prodotti:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 8 = 98765432$$

oppure i prodotti seguenti che noi nel moltiplicatore scomponiamo, per dare maggior evidenza alla caratteristica:

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

Analogamente curiosi sono ancora i seguenti:

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

*

che trovano i loro analoghi nei seguenti:

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

7. DIMOSTRAZIONI PARADOSSALI.

Dove si conclude che 2 = 3.

Ognuno riconosce in fatti che

$$4 - 10 = 9 - 15$$

identità che noi possiamo anche scrivere:

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

Per convincersi di questo, il lettore provi ad eseguire i quadrati delle quantità fra parentesi. Fatto ciò, si estragga la radice quadrata d'ambo i membri dell'identità soprascritta, e si avrà:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

Aggiungiamo nel primo e nel secondo membro $\frac{5}{2}$ ed avremo:

$$2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

Siccome $-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0$ tanto in un membro che nell'altro, possiamo scrivere

$$2-0=3-0$$

il che equivale a scrivere

$$2=3$$

Dove si trova che 9 = 5.

La differenza fra 9^2 e 5^2 è 56, numero che si può scrivere: $2\times7\times9-2\times7\times5$.

Dunque scriviamo anche:

$$9^2-5^2=2\times7\times9-2\times7\times5$$

che può anche scriversi:

$$9^2-2\times9\times7=5^2-2\times5\times7.$$

Aggiungiamo in ambo i membri 7^2:

$$9^2-2\times9\times7+7^2=5^2-2\times5\times7+7^2.$$

Ora il primo membro è il quadrato di $9-7$, mentre il secondo è il quadrato di $5-7$, quindi possiamo scrivere:

$$(9-7)^2=(5-7)^2$$

ed estraendo la radice quadrata

$$9-7=5-7$$

ed aggiungendo 7 in ambo i membri, abbiamo:

$$9-7+7=5-7+7.$$

Eseguendo abbiamo proprio:

$$9=5.$$

8. I Quadrati magici.

Se noi abbiamo un quadrato diviso in un numero variabile di quadratini, e collochiamo in ciascuno di essi un numero senza mai ripeterci, noi otteniamo un *quadrato magico* solo quando facendo la somma, o *per colonna*, cioè dall'alto in basso, o *per riga*, cioè da destra a sinistra, o *per diagonale*, si ottenga lo stesso risultato.

Un esempio di quadrato magico si ha nel seguente: il numero fisso che esprime la somma eseguita in ogni modo,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

si dice *costante* del quadrato, ed il numero delle colonne, o delle righe che un quadrato possiede, si dice *ordine* del quadrato. Il nostro quadrato magico è del *terzo ordine* e di *costante 15.*

Prima di estendere il nostro ordine di idee a quadrati magici più singolari, si consideri il quadrato del terz'ordine più sotto riprodotto, e nel quale i numeri delle caselle sono i compresi fra l'1 ed il 9. Come vedesi, esso è di poco diverso dal precedente:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Se noi facciamo ruotare tal quadrato d'un quarto di cerchio intorno al proprio centro, noi otteniamo ancora tre quadrati magici dello stesso ordine e della stessa costante:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Questo avviene poi che le linee diventano colonne, e le colonne linee, mentre le diagonali non fanno altro che scambiarsi reciprocamente.

Ma dai quattro quadrati magici ora ottenuti, noi possiamo dedurne altri quattro aventi le medesime caratteristiche, scomponendoli in righe e posponendo queste nel seguente modo:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Le cose naturalmente vengono a complicarsi quando si mettano altre regole, per esempio, quella per cui tutti i numeri di un *quadrato magico* siano *numeri primi* o quando si aumenti l'ordine del quadrato.

Ecco ad esempio il celebre quadrato magico che troviamo sulla *Melancolia*, la ben nota acquaforte del Dürer:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

D'altra parte avendo un quadrato magico, noi possiamo ottenerne subito un altro dello stesso ordine scrivendo ordinatamente due volte di seguito i numeri di una stessa casella, come nel caso seguente:

40	95	18
29	51	73
84	7	62

si trasforma in

4040	9595	1818
2929	5151	7373
8484	707	6262

Avendo poi due quadrati magici del medesimo ordine, noi possiamo avere da essi un terzo quadrato magico sommando i numeri delle caselle rispettive, come nel seguente caso

11	21	7
9	13	17
19	5	15

+

39	74	25
32	46	60
67	18	53

guale a

50	95	25
41	59	60
86	23	53

In questo caso la somma trasformativa è avvenuta solamente nelle prime due colonne.

Sulle trasformazioni generali che noi potremo operare sui quadrati magici, occorre aggiungere qualche chiarimento

Anzitutto cominciamo col distinguere i quadrati *pari* dagli *impari* a seconda del numero delle caselle distribuite lungo i lati.

Il quadrato della *Melancholia* del Dürer, per esempio, è *pari* mentre il quadrato

4	3	2
1	3	5
4	3	2

è dispari.

Orbene:

Ogni quadrato magico pari resta magico se noi scambiamo simultaneamente senz'alcuna rotazione, le parti opposte

Abbiati il quadrato pari

	1	2	
	4	3	

od il simile:

Noi indicheremo appunto le parti, con i numeri 1. 2. 3. 4 a simiglianza di quanto abbiamo fatto nel primo quadrato.

Orbene, scambiando le parti 1 e 3, 2 e 4, noi otteniamo il secondo quadrato magico. Per i quadrati impari la cosa è diversa:

Ogni quadrato magico impari, resta magico se si scambiano simultaneamente, senz'alcuna rotazione, le parti opposte, ed i frammenti opposti lungo le mediane.

Così ad esempio, il quadrato impari:

	1	A	2	
	D	0	B	
	4	C	3	

può trasformarsi, nell'altro pure magico:

3		C		4
B		0		D
2		A		1

Ma l'enunciato complessivo intorno alle due specie di quadrati magici è il seguente:

Ogni quadrato resta magico se scambiamo dapprima due orizzontali, e poi due verticali che siano tutt'e quattro equidistanti dal centro.

Noi senza dimostrare particolarmente questa proporzione che ha un relativo interesse nella dimostrazione per se stessa, mostreremo con l'esempio seguente il processo di trasformazione.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

N. 1.

a	c	b	d
i	k	j	l
e	g	f	h
m	o	n	p

N. 2.

k	l	i	j
o	p	m	n
c	d	a	b
g	h	e	f

N. 3.

f	h	e	g
n	p	m	o
b	d	a	c
j	l	i	k

N. 4.

È ovvio aggiungere come tutti i quadrati magici che si ottengono con questo processo trasformativo siano tutti differenti da quelli ottenuti con i metodi di cui abbiamo già parlato avanti

Sul tipo dei quadrati magici noi possiamo costruire anche dei *rettangoli magici*. Bisogna però porre qualche restrizione poichè in questo caso il numero delle colonne e quello delle righe non può essere arbitrario: bisogna che esso sia così per le une che per le altre o dispari o pari. In generale poi, e questo facilmente si spiega, nei rettangoli magici si hanno due *costanti* diverse: quella della somma delle colonne, e quella della somma delle righe.

1	13	10	4	12
15	9	3	6	7
8	2	11	14	5

Ecco un esempio di rettangolo magico in cui la costante delle colonne è *24*, e quella delle righe è *40*. Nello stesso modo con cui abbiamo proceduto nella ricerca dei numeri piramidali basandoci su quelli triangolari, è possibile la costruzione di ottaedri e di cubi magici.

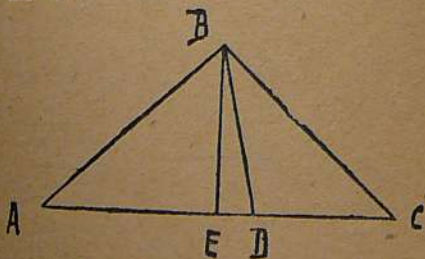
II.

GEOMETRIA

I. SOFISMI:

a) La parte è eguale al tutto.

Per dimostrare questa... assurdità, noi ci riferiremo ad un esempio geometrico mostrando come la parte di un segmento rettilineo sia eguale al segmento stesso.

Abbiasi un triangolo ABC in cui l'angolo maggiore sia quello in B. Si tiri la retta BD in modo che l'angolo CBD sia eguale a quello in A; e da B si abbassi la perpendicolare BE alla AC.

Siccome i triangoli ABC e BDC sono equiangoli, si avrà l'eguaglianza:

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{AB^2}{BD^2}$$

Avendo i detti triangoli anche la stessa altezza BE, si avrà la relazione:

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{AC}{DC}$$

Usufruendo delle sue relazioni precedenti potremo dunque scrivere che:

$$\frac{AB^2}{AC}=\frac{BD^2}{DC}$$

D'altra arte la geometria euclidea c'insegna che

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\,AC\times EC$$

e che

$$BD^2=DC^2+BC^2-2\,DC\times EC$$

Se noi sostituiamo questi valori nel precedente rapporto, abbiamo:

$$\frac{AC^2+BC^2-2\,AC\times EC}{AC}=\frac{DC^2+BC^2-2\,DC\times EC}{DC}$$

che semplificato da:

$$AC+\frac{BC^2}{AC}=DC+\frac{BC^2}{DC}$$

e quindi:

$$\frac{BC^2}{AC}-DC=\frac{BC^2}{DC}-AC$$

Riducendo, dall'espressione precedente si ha:

$$(BC^2-AC\times DC)\,DC=(BC^2-AC\times DC)\,AC$$

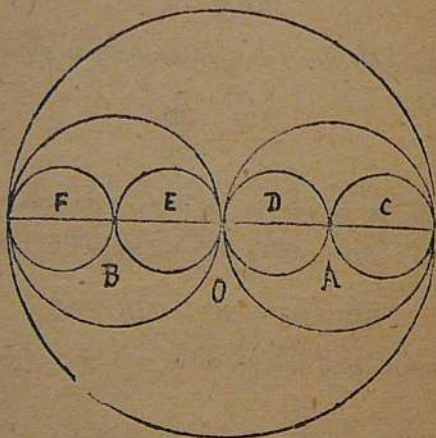
Dividendo ambo i membri per il fattor comune

$$BC^2-AC\times DC,$$

si ha

$$DC=AC.$$

Si osservi la figura e si troverà esatta la nostra asserzione.

b) **La lunghezza d'una circonferenza è eguale al diametro della circonferenza stessa.**

Abbiasi una circonferenza il cui raggio sia R. La geometria ci dice che la lunghezza di essa circonferenza è data da

$$L = 2\pi R$$

dove con L indichiamo appunto tale lunghezza.

Prendiamo su un diametro qualunque di tale circonferenza due punti A e B che separino in due parti eguali il raggio. Si traccino poi le due circonferenze tangenti fra loro ed alla data che hanno i loro centri in A e in B.

La lunghezza d'ogni singola circonferenza è data da $2\pi\frac{R}{2}$. Facendo la somma dele due circonferenze interne or descritte, noi abbiamo:

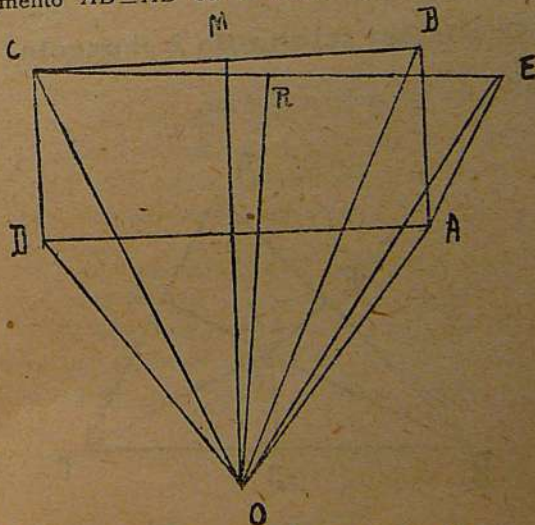
$$2\pi\frac{R}{2} + 2\pi\frac{R}{2} = 2\pi R = L$$

In altri termini, la lunghezza complessiva dele due circonferenze interne è equivalente a quella della circonferenza data.

Se noi applichiamo lo stesso ragionamento a ciascuna delle due circonferenze, e tracciamo quindi le quattro circonferenze interne aventi per centri i punti C, D, E, F, noi abbiamo che la somma delle loro lunghezze è identica a quella della circonferenza data.

Continuando infinitamente la divisione sino a che le circonferenze siano piccole come punti, la loro somma si riduce al diametro, e quindi per le nostre precedenti asserzioni la *circonferenza è eguale al proprio diametro.*

c) **Un angolo retto è eguale ad un angolo ottuso.**

Si prenda un rettangolo qualunque $ABCD$, ed in A si tiri un segmento $AB = AB$ ed in modo che l'angolo BEA sia

acuto. Si congiunga E con C e si cerchi del segmento EC il punto medio R. Si determini anche il punto medio M

del segmento CB, e tanto in M che in R si tirino le perpendicolari ai segmenti stessi. Tali perpendicolari s'incontrano in un punto O. Si unisca O con A, E, B, C. D.

Dalla figura abbiamo:

$$OD = OA \qquad \text{ed} \qquad OC = OE.$$

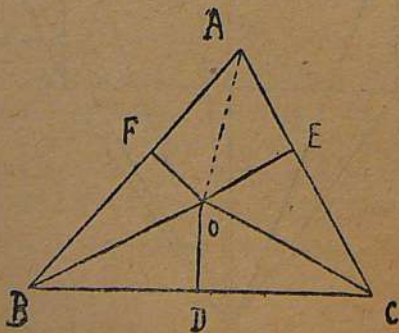
Quindi i triangoli DOC e AOE dovranno avere gli angoli CDO e EAO rispettivamente eguali.

D'altra parte, essendo l'angolo $ADO = DAO$ dovrà anche essere l'angolo

$$ADE = DAE.$$

Quest'ultima espressione confrontata con la figura, è quella che ci dimostra la verità... della nostra asserzione.

d) **Qualsiasi triangolo è isoscele.**

Sia ABC un triangolo qualunque.

Nel punto medio del lato BC s'innalzi la perpendicolare DO sino ad incontrare in O la bisettrice dell'angolo in A.

In tale costruzione possono darsi tre casi:

1.º la perpendicolare e la bisettrice non s'incontrano;

2.º la perpendicolare e la bisettrice s'incontrano in un punto interno della figura;

3.º la perpendicolare e le bisettrice s'incontrano in un punto esterno al triangolo.

Esaminiamo i tre casi.

1.º caso. — Se la perpendicolare e la bisettrice non s'incontrano, per la figura del triangolo non possono essere parallele, quindi debbono coincidere. Ma la geometria ci dice che se in un triangolo la bisettrice condotta in un angolo è perpendicolare al lato opposto, i due lati adiacenti a questo sono eguali, e quindi nel nostro caso $AB = AC$ ed il triangolo è isoscele.

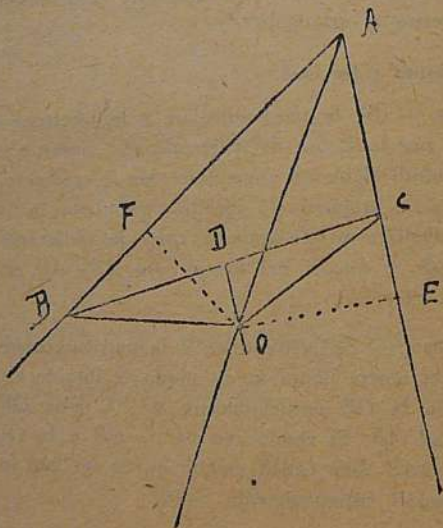
2.º caso. — Se la bisettrice e la perpendicolare s'incontrano nella nostra figura in un punto O interno al triangolo si conduca la OE perpendicolare ad AC e la OF perpendicolare ad AB. Si conducano poi la OB e la OC. Allora OAF ed OAE sono eguali perchè hanno un lato in comune e due angoli rispettivamente eguali.

Analogamente i triangoli BOF e COE sono eguali perchè hanno i lati OB ed OC rispettivamente eguali, i lati OF ed OE eguali, perchè così risultano dall'eguaglianza dei due triangoli precedentemente considerati, ed inoltre essendo entrambi rettangolari in F ed in E hanno anche un angolo eciale.

I due triangoli essendo eguali, daranno l'eguaglianza dei loro lati, e quindi $BF = EC$. Ma abbiamo già visto che $AF = AE$, quindi sommando abbiamo

$$BF + FA = AE + EC, \text{ vale a dire } AB = AC.$$

Quest'eguaglianza riguardante i lati del nostro triangolo ABC, ci dice che esso è isoscele.

3.° caso. — Se la bisettrice all'angolo in A e la perpendicolare in D al lato BC s'incontrano in un punto D situato esternamente al triangolo, unisco O con B e con C,

e da O abbasso le perpendicolari OE ed OF sui lati prolungati AB ed AC del nostro triangolo.

Con dimostrazione identica a quella del caso precedente, si dimostra l'eguaglianza dei due triangoli AFO ed AEO che hanno due angoli rispettivamente eguali ed lato AO in comune.

E con dimostrazione pure identica a quella del caso precedente, si mostra l'eguaglianza fra i due triangoli BOF COE, perchè essi sono rettangoli in E ed in F, hanno l-

ipotenuse eguali ad un cateto rispettivamente eguali. Quindi per l'eguaglianza dei due primi triangoli noi abbiamo

$$AF = AE$$

e per quella dei secondi triangoli

$$BF = CE.$$

Sottraendo l'una dall'altra tali eguaglianze abbiamo

$$AF - BF = AE - CE \text{ vale a dire } AB = AC.$$

Ed abbiamo anche questa volta dimostrato l'eguaglianza di due lati del nostro triangolo ABC il quale è perciò isoscele. Dunque, riassumendo, in qualunque caso e qualunque triangolo si prenda, è possibile dimostrare che esso triangolo è sempre isoscele.

e) Il quadrato di Darwin.

Si abbia un quadrato composto di 64 quadratini a simiglianza di una scacchiera. Imaginiamolo materiale, per esempio, di cartone, e lo si tagli secondo le direzioni che nel

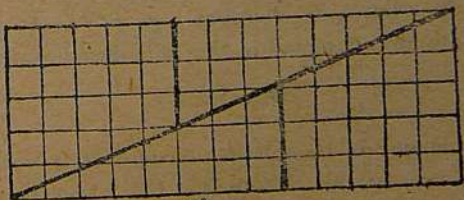



Fig. 1

nostro schizzo venne segnate con tratti più grossi (fig. 2). Ciò fatto si ricompongano i pezzi così da ottenere un rettangolo simile a quello del nostro schizzo (fig. 1).

La curiosità consiste appunto nell'*aumento di un'unità* nel numero dei quadratini componente la superficie.

Infatti nel quadrato avevamo $8 \times 8 = 64$ quadratini, mentre nel rettangolo d'eguale superficie ne abbiamo $5 \times 13 = 65$.

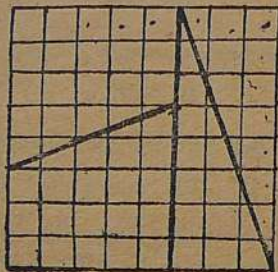



Fig. 2

La cosa è semplicemente sbalorditiva, e noi di questo, come dei precedenti sofismi daremo nel seguente titolo dei chiarimenti.

2. Chiarimenti.

a) *Sulla parte che è eguale al tutto.*

Quando si effettua la divisione per $BC^2 - AC \times DC$ e si ottiene, tanto in un membro che nell'altro l'assurdo

$$DC = AC$$

ma si commette un'irregolarità incompatibile con i principî matematici, perchè $BC^2 - AC \times DC$ è eguale a zero, e dividere un numero od una quantità per zero è cosa che non ha significato.

Per convincerci che tale quantità è proprio zero, basta osservare i triangoli ABC, DBC che sono simili e che danno la relazione

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

b) *La circonferenza che è eguale al proprio diametro.*

Il vizio di logica in questa dimostrazione si ha quando si passa al cosidetto *limite* matematico e si considerano le circonferenze come altrettanti punti. Siccome la somma di quante si vogliano piccole circonferenze è una *costante*, è semplicemente assurdo parlare di limite, poichè questo concetto è peculiare delle quantità *variabili*.

c e d) *L'angolo retto è maggiore di un angolo ottuso. Tutti i triangoli sono isosceli.*

È ovvio notare il vizio di logica accresciuto in qualche caso dal difetto di costruzione.

e) *Il quadrato di Darwin.*

Interessante è invece esaminare questo sofismo, o paralogisma ottico.

L'illusione è dovuta al fatto che i vertici dei quattro pezzi di carta che nella prima figura (quella del rettangolo) giacciono lungo la diagonale non coincidono esattamente in direzione, perchè in realtà includono un piccolo rombo o losanga, la cui superficie è proprio eguale a quella di un quadratino. In altri termini, per una quantità non apprezzabile ad occhio, la diagonale marcata del rettangolo, è maggiore dell'altra.

Aritmeticamente il paradosso dipende dalla relazione

$$5 \times 13 - 8^2 = 1.$$

Risultati identici noi possiamo ottenere usando le formule:

$$13 \times 34 - 21^2 = 1$$
$$34 \times 89 - 55^2 = 1$$

ed altre che si ottengono considerando convergente la frazione continua:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

3. La quadratura del circolo.

Ecco il problema che da secoli e secoli ha afflitto molte menti umane, e che tuttora, malgrado le dimostrazioni vigorose che si son date per provare l'*assoluta impossibilità* di risolvere il problema con la riga e col compasso, occupa la mente di molti paranoici della matematica.

Dante, ch'era a conoscenza degli sforzi vani compiuti dai geometri, in una sua similitudine accenna al problema dicendo:

Qual'è 'l geometra che tutto s'affige
Per misurar lo cerchio, e nol' ritrova
Pensando, quel principio ond'egli indige...

La questione si presenta semplicissima: «*Dato un circolo, trovare il lato del quadrato equivalente*».

Tentare rapidamente la dimostrazione dell'impossibilità risolutiva del problema *con la riga e col compasso*, non è cosa che si addice ad una breve trattazione come la nostra. Fin dal 1882 venne data la dimostrazione analitica dell'impossibilità, sebbene dal 1761 Lambert avesse provato come la lunghezza della circonferenza, ed il valore di π fossero *incommensurabili*, e dal 1803 Legendre avesse dimostrato che anche il quadrato di π era una quantità incommensurabile con la cirocnferenza.

Abbiamo detto *con la riga e col compasso* perchè la quadratura del circolo è stata ottenuta con curve d'ordine superiore al cerchio ed alla retta, le sole curve cioè che possono tracciarsi con gli strumenti anzidetti.

Per non entrare in dettagli di matematica superiore, noi ci limiteremo a dare alcune soluzioni *approssimate* del problema mediante la riga ed il compasso, soluzioni che nella storia della matematica sono celebri per gli autori che le imaginarono, o per la grande approssimazione loro alla realtà.

Fra queste, per il risultato primo cui giungono, noi pos-

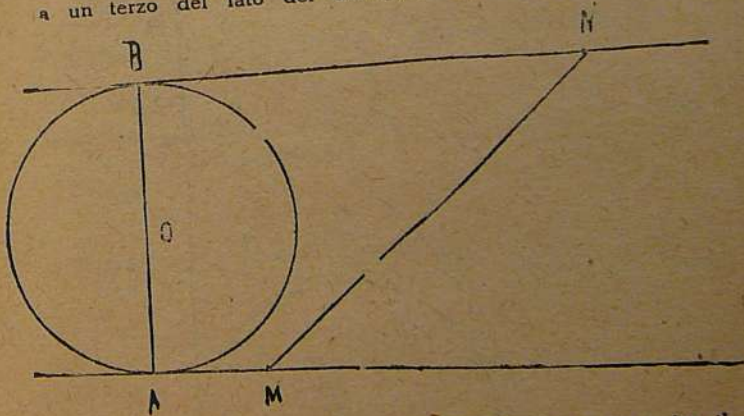
siamo effettuare una divisione netta, fra le soluzioni, cioè:

1.° che danno la rettificazione della circonferenza;

2.° che danno il lato del quadrato.

Ed avanti procedere intendiamo: *rettificare* una curva qualunque, ed in particolare una circonferenza, significa trovare un segmento di retta la cui lunghezza sia equivalente alla circonferenza data. A questo metodo appartengono fra, le altre, le costruzioni seguenti:

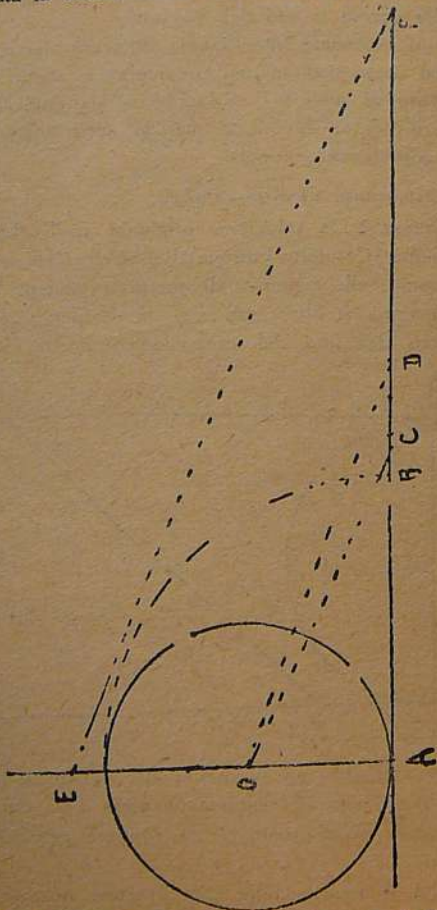
a) *Costruzione di Konskansky.*

Più precisa è la soluzione originale di Koskansky che è la seguente. Condotto che sia il diametro AB del cerchio, si conducono nelle estremità di questo le tangenti. Poi nella stessa direzione si porta sull'una, un segmento AM eguale a un terzo del lato del triangolo equilatero inscritto nel

cerchio, e sull'altra un segmento BN eguale a tre volte il raggio. Il segmento MN equivale a metà della circonferenza, e quindi esso raddoppiato ci dà l'intiera rettificazione che si cercava.

Dato che il raggio della circonferenza nostra sia eguale ad 1, il segmento $MN = 3,14153334$ si approssima molto a π differendo da questo di solo 0.00005931

b) *Costruzione di Specht.*

Sia data la circonferenza di centro O che si desidera ret-

tificare. Conduciamo in un punto qualunque A di essa una tangente indefinita, ed il diametro passante per A. Ciò fatto,

a partire da A si segni sulla tangente un punto B distante due volte il raggio, cioè un diametro. Nella stessa direzione, si seguino ancora sulla tangente i punti C e D in modo che la lunghezza BC risulti la quinta parte del raggio e la CD il doppio di questa.

Sul diametro passante per A si prenda la lunghezza AE eguale alla OC, e da E si tiri la parallela alla OD sino a incontrare in F la tangente in A.

La lunghezza AF equivale approssimativamente alla lunghezza della circonferenza data. In altri termini il segmento AF rappresenta la rettificazione della circonferenza.

Mediante tale costruzione il segmento

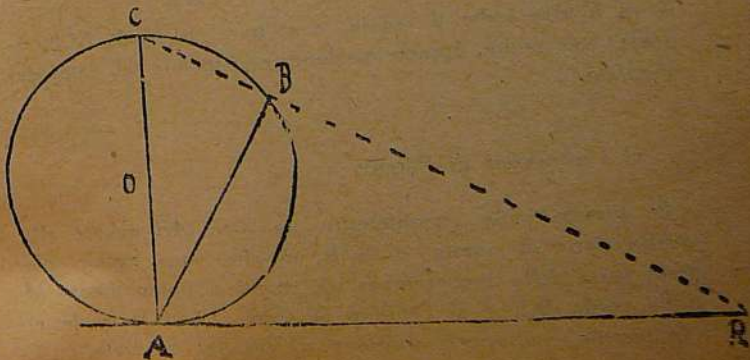
$$AF = 2 \times 3,1415919$$

e quindi abbiamo per π una differenza di solo 0,0000007.

***

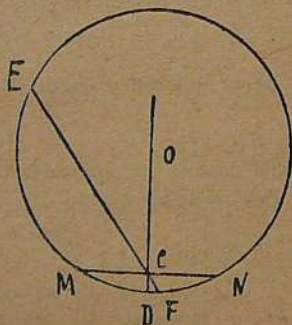
Vediamo ora delle costruzioni approssimate che ci danno *ipso facto* il lato del quadrato.

a) *Costruzione di Sonnet.*

Si conduca in A una tangente alla circonferenza data e si segni su questa un segmento AR equivalente a quattro

volte il raggio. Si congiunga l'estremo C del diametro con R e si segni sulla circonferenza il punto B.

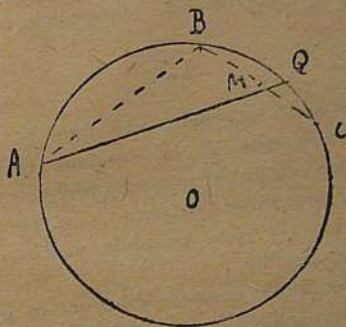
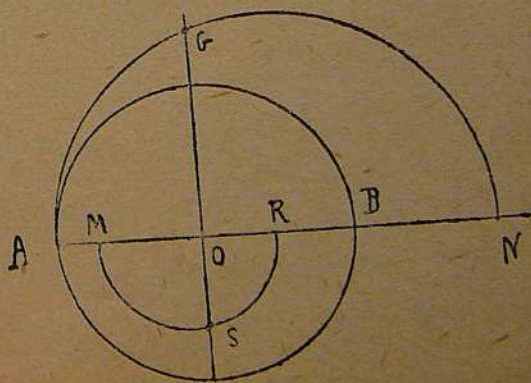
La corda AB è, approssimativamente, il lato del quadrato.

b) *Costruzione di Willich.*

Si tracci nella circonferenza la corda MN eguale al raggio, e si determini di questa il punto medio C. Unendo C con il centro della circonferenza, si determina il punto D che divide l'arco MN in due parti eguali. Ciò fatto, si porti da

D in E due volte il raggio, e si tracci la corda ECF, la quale con molta approssimazione corrisponde al lato del quadrato.

c) *Costruzioni di Péraux.*

Si prenda sulla circonferenza un arco AB eguale alla quarta parte di questa, e da B un altro arco eguale alla sesta parte della circonferenza. Si cerchi il punto medio M della corda BC, e si conduca la corda AMQ la quale ci rappresenta con approssimazione il lato del quadrato.

Data la circonferenza di centro O e di raggio R, si tracci un diametro qualunque AB e su questo si prenda

una distanza $OM = \frac{3}{5}$ del raggio, ed una distanza ON eguale a $\frac{3}{2}$ del raggio. Sia R il punto medio del segmento OB. Si traccino allora le due semicirconferenze aventi per

diametri rispettivi AN ed MR, curnado che il loro tracciato sia da bande opposte rispetto al diametro AB della circon-

ferenza data. Ciò fatto, si conduca in questa il diametro perpendicolare ad AB sino ad incontrare in G ed S.

Il segmento GS corrisponde approssimativamente al lato del quadrato.

***

Nota. — Abbiamo già detto che tutte le costruzioni da noi elencate danno con approssimazione il lato del quadrato la cui area equivale a quella del cerchio, ed all'inizio di questo paragrafo dicemmo come la *soluzione perfetta* del problema sia stata possibile mediante curve d'ordine superiore al cerchio.

Ora diremo che molte sono le soluzioni di questo celebre problema con curve ellittiche, paraboliche, ecc., le quali nel caso speciale in cui vengono impiegate, si dicono *quadratrici.* La più antica di queste venne trovata da Ippia d'Elea, geometra che visse intorno al 420 a. C., mentre la più nota ai geometri antichi è la quadratrice di Dinostrato, geometra greco che fiorì intorno al 350 avanti l'èra volgare.

III.

ALGEBRA

1. SOFISMI.

a) Tutti i numeri sono eguali.

Per dimostrare questa... verità prendiamo due numeri qualunque a e b diversi tra loro, e facciamo il nostro ragionamento per assurdo. In altri termini proviamo che è impossibile l'ineguaglianza fra due numeri diversi. Essi sono eguali per forza; ed ecco perchè: se a e b sono diversi, la loro media aritmetica c è data da

$$\frac{a+b}{2}=c$$

da cui si ha

$$a+b=2c.$$

Moltiplichiamo da una parte e dall'altra per $a-b$ ed avremo:

$$(a+b)\,(a-b)=2c\,(a-b).$$

Ma il primo membro essendo il prodotto della somma per la differenza di due numeri, equivale alla differenza dei loro quadrati, quindi, sviluppando anche il secondo membro, avremo:

$$a^2-b^2=2ac-2bc$$

da cui

$$a^2 - 2\,ac = b^2 - 2\,bc.$$

Aggiungendo ad ambo i membri c^2 si ha:

$$a^2 - 2\,ac + c^2 = b^2 - 2\,bc + c^2.$$

Così il primo che il secondo membro sono dei quadrati perfetti, quindi si può scrivere:

$$(a - c)^2 = (b - c)^2$$

ed estraendo la radice:

$$a - c = b - c.$$

Aggiungendo c in ambo i membri, si ha:

$$a - c + c = b - c + c$$

E siccome $-c + c = o$, sostituendo si avrà:

$$a - o = b - o$$

il che significa che

$$a = b.$$

Dunque anche supposto che i numeri a e b fossero diseguali, la... logica matematica ci dice ch'essi sono eguali.

b) **Un numero è eguale a tutti i suoi multipli.**

Ricordiamo che avendosi due frazioni eguali tra di loro, cioè l'eguaglianza

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

l'eguaglianza sussiste ancora quando noi aumentiamo simultaneamente numeratore e denominatore d'una quantità fissa c, ossia è vera l'espressione

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{a+c}{b+c}$$

L'algebra ci dice anche che moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per una stessa quantità, abbiamo ancora lo stesso rapporto Ossia

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

A queste due frazioni eguali, aggiungiamo una quantità data c, come in precedenza, ed avremo ancora l'eguaglianza, cioè:

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{am+c}{bm+c}$$

Riduciamo a forma intiera:

$$(a+c)\ (bm+c) = (b+c)\ (am+c).$$

Eseguendo i prodotti si ha:

$$abm + ac + cbm + c^2 = bam + bc + cam + c^2$$

Togliendo in ambo i membri c^2 che è comune

$$abm + ac + cbm = abm + bc + cam$$

Separando i termini in m da quelli che non contengono questo fattore avremo.

$$ac - bc = abm - abm + acm - bcm$$

e riducendo

$$ac - bc = acm - bcm$$

ossia

$$ac - bc = m\ (ac - bc)$$

Supponiamo ora che $ac - bc$ sia $= K$; allora:

$$K = mK$$

il che ci dice che il numero K è eguale a m volte se stesso. E siccome noi abbiamo scelto m ad arbitrio, possiamo dare ad m tutti i valori da 1 all'infinito; così per $m = 2$ abbiamo che un numero è eguale al doppio del numero, per $m = 3$ un numero è eguale al suo triplo, e così via dicendo. Possiamo però dare ad m dei valori frazionari, ed allora la nostra ultima relazione scritta ci dice che dando ad m il valore $\frac{1}{2}$, un numero è eguale alla propria metà dando ad m il valore $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ successivamente, un numero è eguale alla terza, alla quarta, alla quinta parte di se stesso.

Come si vede, generalizzando il ragionamento, un numero può essere eguale a qualsiasi altro.

c) I numeri positivi sono eguali ai corrispondenti numeri negativi.

c) *I numeri positivi sono eguali ai corrispondenti numeri negativi.*

Se x è un valore che soddisfa l'equazione

$$e^x = -1$$

quadrando si ha

$$e^{2x} = 1$$

da cui $2x = o$ ossia $x = o$.

Siccome

$$e^x = e^0 \qquad \text{ma} \qquad e^x = -1$$
$$e^0 = 1 \qquad \text{e quindi} \qquad 1 = -1.$$

Orbene, l'algebra ci dice che un numero positivo qualsivoglia a è diverso dal suo corrispondente $-a$. Ma se noi moltiplichiamo per a il nostro ultimo risultato $1=-1$ abbiamo invece che

$$a = -a$$

che è quanto volevasi dimostrare.

d) I numeri negativi sono maggiori dei numeri positivi.

Se in una proporzione qualunque

$$x : y = h : k$$

noi abbiamo x maggiore di y, anche h è maggiore di k. Per esempio nella proporzione

$$10 : 5 = 4 : 2$$

essendo 10 maggiore di 5, dev'essere 4 maggiore di 2, cosa che può esprimersi dicendo che se il primo antecedente è maggiore del suo conseguente, anche il secondo antecedente è maggiore del proprio conseguente.

Ciò premesso è facile notare come il rapporto

$$\frac{a}{-b} = -K$$

sia identico al rapporto

$$\frac{-a}{b} = -K$$

poichè la divisione di due numeri, uno qualunque dei quali sia negativo, è sempre un numero negativo.

Dalle due relazioni soprascritte possiamo stabilire l'egua glianza fra i primi membri, cioè

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$

e dando a questa proporzione la forma ordinaria:

$$a : -b = -a : b.$$

Applicando ora il principio accennato, si ha che, essendo a, numero positivo, maggiore di $-b$, numero negativo, deve anche essere $-a$, numero negativo, maggiore di b, numero positivo.

e) Dimostrazione teologica.

Il padre Gratry cercò di dimostrare matematicamente che Dio, l'*infinito*, può sempre creare, come creò, le cose dal nulla, ossia dalla *zero*.

Siccome il simbolo

$$\frac{A}{0}$$

matematicamente è considerato come *infinito*, noi moltiplicando la frazione soprascritta per zero abbiamo

$$\frac{0}{0}$$

che è il simbolo dell'indeterminazione, ed al quale noi possiamo attribuire un *valore qualunque.*

Nel simbolo $\frac{A}{0}$, rappresentante l'infinito A dev'essere sempre un valore finito, ed è per questo motivo che la dimostrazione del padre Gratry si presenta a doppio taglio nel senso che Dio, per creare qualcosa, ossia $\frac{0}{0}$, dev'essere già in possesso di un A qualsivoglia, ossia di un'altra cosa.

2. Chiarimenti.

Nei diversi sofismi algebrici che noi abbiamo esposti più volte il vizio di logica è palese, ed il lettore che non l'avesse trovato, si ricordi che più volte, semplificando, noi abbiamo diviso ambo i membri di cui eguaglianza per una quantità che era *identicamente zero*. Ed ognuno sa benissimo come ciò non sia lecito, per il fatto che la divisione d'una quantità qualunque per zero non ha significato.

Talvolta elevando a quadrato i due membri d'una eguaglianza considerammo sempre la soluzione positiva del risultato, soluzione che ci dava appunto il modo di giungere alla conclusione sofistica che desideravamo.

Si ricordi quindi, che ogni qualvolta si estrae la radice quadrata da un numero, occorre sempre considerare il doppio segno $\pm$ e vedere quale dei due dev'essere scelto.

3. Problemi caratteristici.

a) *Trovare qual sia il maggiore fra i numeri:*

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \sqrt[5]{5} \quad \sqrt[6]{6} \ldots$$

Si considerino due termini qualunque ma consecutivi di detta serie:

$$\sqrt[n]{n} \qquad \sqrt[n+1]{n+1}$$

e si paragonino fra loro dopo averli ridotti al medesimo indice, cioè:

$$\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} \qquad \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}$$

Essendo gli indici eguali, basterà paragonare fra loro le quantità sotto il segno di radice. Dividendo le stesse per n^n abbiamo:

$$n \quad \text{e} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sviluppando il binomio esponenziale abbiamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\times 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\times 2\times 3} + \ldots$$

D'altra parte sappiamo che

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \ldots < 3$$

Osserviamo che per $n=2$ la radice $\sqrt[3]{3}$ è maggiore della precedente $\sqrt{2}$, e che per $n=3$ abbiamo

$$n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dunque il numero $\sqrt[3]{3}$ è il maggiore della nostra serie che potremo scrivere:

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} \text{ ecc. } \ldots$$

b) *Trovare un numero di quattro cifre eguale al quadrato della somma formato dalle sue due prime cifre e del numero formato dalla somma delle ultime due.*

Il nostro numero incognito essendo un quadrato anzichè

chiamarlo N lo indicheremo con N^2. Indichiamo con x il numero formato dalle sue due prime cifre e con y quello formato dalle sue ultime due.

Allora esso sarà:

$$N^2 = 100\,x + y = (x + y)^2$$

da cui $N = x + y$ ed $N\,(N - 1) = 99\,x$

Siccome il prodotto di due numeri consecutivi N ed $(N - 1)$ è sempre divisibile per 99 cioè per 9×11, così od N od $N - 1$ sarà almeno divisibile per 9 o per 11.

D'altra parte N^2 è compreso fra 1000 e 10 000 e quindi N od $N - 1$ è compreso fra 30 e 100. Basterà quindi cercare un multiplo di 9 compreso fra 30 e 100 ed unirlo ad un multiplo di 11 a questo consecutivo e compreso fra gli stessi limiti.

I multipli di 9, compresi in questi limiti, sono:

36, 45, 54, 64, 72, 81, 90, 99

e quelli di 11 sono

33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

Esaminando le due righe soprascritte, si vede che i due numeri da unire sono

44 e 45 54 e 55

e quindi per N possiamo scegliere solo i valori

45, 55, 90

che quadrati danno

2025, 3025, 9801

numeri tutti che soddisfano il problema.

c) *Trovare un numero di due cifre, tale che scrivendolo due volte di seguito, e scrivendo poi la cifra 1, si abbia un numero di 5 cifre quadrato perfetto.*

Indichiamo con u la cifra delle unità e con d quella delle diecine. Per dato, il nostro numero N incognito deve soddisfarne la relazione:

$$N^2 = du\ du\ 1$$

il che equivale a scrivere:

$$N^2 = du \times 1000 + du \times 10 + 1$$

e semplificando:

$$N^2 = du \times 1010 + 1$$

ossia:

$$du \times 101 \times 10 = N^2 - 1$$

e scomponendo il secondo membro:

$$du \times 101 \times 10 = (N + 1)\ (N - 1).$$

Siccome il fattore 101 che appare nel primo membro deve necessariamente dividere uno dei fattori del secondo, così possiamo scrivere:

$$N + 1 = 101\,K \text{ da cui } N = 101\,K - 1.$$

Ma per dato del problema N^2 ha cinque cifre, e quindi dev'essere compreso N fra

$$100 \leq N < 317$$

ragione per cui K non può avere altri valori all'infuori di

1, 2, 3.

L'enunciato stesso ci dice d'altra parte che N^2 deve finire

con un 1 e quindi N deve finire anch'esso per 1 o per 9. Allora con tali restrizioni K non può essere nè 1, nè 3, ed allora dev'essere eguale a 2.

Siccome abbiamo scritto che:

$$N = 101\,K - 1$$

abbiamo subito $N = 201$ il cui quadrato è 40401.

Quindi, riferendoci alla prima relazione scritta:

$du = 40$ dove $u = 0$ e $d = 4$.

d) *Trovare i numeri intieri x, y e z che soddisfano la relazione:*

$$\frac{x}{y} \times z = \frac{x}{y} + z.$$

Dall'enunciato stesso noi possiamo ricavare:

$$z = \frac{x}{x - y}$$

e posto che sia $x = y + u$, possiamo scrivere:

$$z = \frac{y + u}{u} = \frac{y}{u} + 1.$$

Ma per ipotesi z dev'essere un numero intiero, quindi dovremo avere: $y = mu$ da cui $z = m + 1$ ed $x = (m + 1)\,u$.

Scrivendo questi valori generici nella relazione data nell'enunciato, abbiamo:

$$\frac{(m+1)\,u}{mu} \times (m+1) = \frac{(m+1)\,u}{mu} + (m+1)$$

ed ora dando ad m valori qualsivogliano, noi possiamo scri-

vere infinite relazioni aventi numeri interi e dei tipo di quella assegnata, per esempio:

$$\frac{7}{6} \times 7 = \frac{7}{6} + 7$$

$$\frac{156}{143} \times 12 = \frac{156}{143} + 12$$

le quali sono molto curiose perchè ci mostrano come sia possibile, in apparenza, l'esistenza di numeri che moltiplicati o sommati con uno stesso numero, diano lo stesso risultato.

4. Primo problema greco.

Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. E Pitagora risponde che la metà studia matematica, un quarto le scienze naturali, un settimo s'esercita alla meditazione. Inoltre vi sono tre donne.

Se noi indichiamo con x il numero degli allievi di Pitagora, potremo scrivere l'equazione:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$

da cui

$$\frac{14\,x}{28} + \frac{7\,x}{28} + \frac{4\,x}{28} + 3 = x$$

e riducendo:

$$+ \frac{52\,x}{28} + 3 = x$$

e separando l'x:

$$3 = x - \frac{25\,x}{28}$$

da cui:

$$3 = \frac{28\,x}{28} - \frac{25\,x}{28} = \frac{3\,x}{28}$$

ossia $84 = 3\,x$ ed $x = 28$

SECONDO PROBLEMA.

Did quota nunc hora est? Superest tantum ecce dici
Quantum bis gemini exacta de luce triens.

che tradotto è il seguente:

« O tu che indichi sì bene le ore, quante ne sono trascorse da stamane se restano due volte i due terzi di quelle trascorse? »

Siccome il giorno anticamente era diviso in 12 ore, e ci si trova in un momento in cui debbono ancora trascorrere i $\frac{4}{3}$ di quelle trascorse, è evidente che i $\frac{7}{3}$ di quest'ultime valgano 12. Onde possiamo scrivere:

$$12 \times \frac{3}{7} = 5^h \frac{1}{7} \text{ (trascorse)}$$

$$6^h \frac{6}{7} \text{ (da trascorrere)}$$

e indicando con x le ore trascorse, avremo:

$$x + 2 \times \frac{2}{3} x = 12$$

da cui risolvendo

$$x = 5^h \frac{1}{7}.$$

L'EPITAFFIO DI DIOFANTO, tradotto in volgare ci dice:

« Questa tomba rinchiude Diofante. Oh meraviglia! Essa dice matematicamente quanto egli visse. Dio gli accordò il sesto della sua vita per l'infanzia, aggiunse un dodicesimo perchè nell'adolescenza le sue guance si coprissero di peluria: inoltre fece per lui brillare 7 anni la fiaccola d'Imene

e dopo 5 anni gli diede un figlio. Ahimè: unico ed infelice figlio al quale la Parca non permise di vedere la metà della vita di suo padre. Come avrebbe fatto da solo a vedere la metà di suo padre? Durante quattro anni ancora, confortando il suo dolore con lo studio delle cifre, egli raggiunse il termine di sua vita. »

Traducendo in equazione abbiamo:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 5 + 4 = x$$

da cui x, età di Diofanto, risolvendo

$$x = 84.$$

FINE

INDICE

PAG

BIBLIOTECA DEL POPOLO

a Cent. **90** il Volume :: Volume doppio Lire **1.80**

ULTIMI VOLUMI PUBBLICATI

373. Letteratura russa.
374. Geometria descrittiva.
375. Medicina legale.
376. Risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado.
377. La vita dei batteri.
378. Manuale del ciclista.
379. Apparecchi da proiezione e loro struttura.
380. Frasario di affari italiano-inglese.
381. La teoria atomica.
382. Formulario di chimica inorganica. — Parte I.
383. Idem — Parte II.
384. Guida degli apparecchi da proiezioni.
385. Il libro dei giuochi.
386. Grammatica greca antica. — Parte II.
387. Il dilettante elettricista.
388. La scherma di fioretto.
389. Compendio di diritto amministrativo italiano.
390. Storia delle Ferrovie.
391. La morte apparente.
392. Antropologia criminale.
393. La Conquista delle Regioni Artiche.
394. Letteratura Francese contemporanea.
395. Brevetti e Privative.
396. Lavoro Teneriffa. — Pizzi di Bruges, ecc.
397. Giurisprudenza veterinaria.
398. Elementi di stereometria.
399. Storia e Antologia della Poesia Sud-Americana.
400. Manuale per i notai.
401. Il giuoco del biliardo.
402. Storia dell'America del Sud.
403. La macchina dinamo-elettrica
404. La musica in Oriente.
405. Le Epilessie.
406. Letteratura Spagnuola.
407. Formulario Notarile.
408-409. Antidoti e soccorsi d'urgenza.
410. Ordinamento Generale Giudiziario.
411. Geografia econom. d'Italia.
412. Istituzioni di Diritto Romano
413. Le malattie delle piante coltivate e rimedi.
414. Giuochi diversi.
415-416. L'erbario.
417. L'allievo Capomastro.
418. Nozioni di chimica organica.
419-420. Rimedi nuovi.
421. Lavori in pagliette e perline.
422. Prospetto di tutte le coniugazioni francesi.
423. Embriologia dell'uomo e dei vertebrati.
424. Istituzione di diritto civile.
425. Corrispondenza spagnuola-italiana
426. Il soprannaturale.
427. Giosuè Carducci.
428. Geometria descrittiva.
429-430. Pratica del canto in chiave di Sol
431. La tramvia elettrica.
432. Calcolo differenziale: massimi e minimi.
433. Il Testamento. — Sue forme — Sua validità.
434. Il diritto Penale.
435. La macchina a vapore.
436. La fotografia dei colori.
437. Monete. — Pesi. — Misure.
438. Manuale dei verbi della lingua italiana.
439. La Dottrina del Diritto Naturale
440. Caccia e selvaggina.
441. Importanti applicazioni dei logaritmi.
442. Formulario di Chimica organica. — Parte I.
443. Enigmistica.
444. Il problema dell'Universo nella filosofia.
445. I primi elementi di analisi minerale.
446. Marte e l'ipotesi della sua abitabilità.

Inviare Cartolina-vaglia alla Casa Editrice Sonzogno, via Pasquirolo, 14, Milano

BIBLIOTECA DEL POPOLO

447. La filosofia della longevità.
448. L'Italia prima di Roma.
449. Delle Assicurazioni.
450. L'essenza del Marxismo.
451. La storia del Sole.
452-453. Dizionarietto delle forme verbali e latine.
454-455. Principali vocaboli del Poliglotta inglese.
456-457. Idem. - Francese.
458-459. Idem. - Spagnuolo.
460-461. Idem. - Tedesco.
462. La posta attraverso i tempi.
463. La Filosofia del Diritto.
464-465. Atlantino Geografico.
466. La Sociologia.
467-468. La navigazione aerea I. Aerostati e Dirigibili.
469. Aree e volumi.
470. Raccolte zoologiche.
471. Metodo per mandolino napoletano. [Europa
472. Manualetto per l'emigrante in
473. Fotografia per tutti.
474-475. La navigazione aerea. II. Aeroplani e macchine volanti.
476. L'allievo linotipista.
477. Vocabolarietto di termini filo
478. Il bibliotecario. [nci
479. L'essenza dell'anarchismo.
480-481. Petit résumé de syntaxe Française.
482. Gli Eschimesi.
483. La previsione del tempo.
484. Leone Tolstoi.
485-486. Il dilettante meccanico.
487. Fraseologia latina.
488. Il Culto religioso.
489. I secoli della letteratura italiana: Il Trecento.
490. Idem. - Il Quattrocento.
491. La teoria e la pratica del trasporto musicale.
492. I secoli della letteratura italiana: Il Cinquecento.
493. Il commercio nell'antichità.
494. Manualetto d'ippica.
495. La Divina Commedia esposta al popolo: Inferno.
496. Le proiezioni ortogonali.
497-498. La locomotiva a vapore moderna.
499. La Divina Commedia esposta al popolo: Il Purgatorio.
500. I secoli della letteratura italiana: Il Seicento.
501. La Divina Commedia esposta al popolo: Il Paradiso.
502. La storia e la teoria dell'antica musica greca.
503. L'«Odissea» narrata al popolo. - Parte I.
504. Apparecchi facili a costruirsi: 1.° Elettricità.
505. L'«Odissea» narrata al popolo. - Parte II.
506. L'«Eneide» esposta al popolo. - Parte I.
507. Idem. - Parte II.
508. L'Evoluzione della vita.
509. La Gerusalemme liberata esposta al popolo. - Parte I.
510. Le Banche.
511. La Gerusalemme liberata esposta al popolo. - Parte II.
512. Formulario di chimica organica. - Parte II.
513. Storia e antologia della letteratura turca.
514. L'«Iliade» esposta al popolo. - Parte I.
515. L'arabo parlato.
516. L'«Iliade» esposta al popolo. - Parte II.
517. Manuale di chimica analitica qualitativa.
518. Storia e Antologia della letteratura araba. [metalli.
519. Vade-mecum del saggiatore dei
520. Eccezioni fonetiche della lingua francese.
521. I secoli della letteratura italiana: Il Seicento.
522. Teoria del regolo calcolatore e sue applicazioni.
523. I secoli della letteratura italiana: L'Ottocento.
524. Vade-mecum dell'italiano in
525. Topografia pratica. [Giappone.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

26. Storia degli Stati Uniti.
27. Rimario della lingua italiana - Vol. I.
28. Idem. - Vol. II.
29. Geografia storico-politica
30. La luce elettrica.
31. La cooperativa di consumo.
33. La Stenografia. - Vol. I
34. Idem. - Volume II.
35. Idem. - Volume III.
36. Geometria analitica del piano e sue applicazioni.
37. Dizionarietto dantesco.
38. Trigonometria sferica e sue applicazioni.
39. Storia del Risorgim. italiano
40. I secoli della letteratura italiana: Le origini.
41. Elementi di costruzione delle macchine.
42. L'Operaio meccanico.
43. Formulario comp. di Computisteria e Ragioneria. - Volume I.
44. Formulario compl. di Computisteria e Ragioneria. - Volume II.
45. I fenomeni dell'ipnotismo e della suggestione.
46. Riccardo Wagner.
47. Prontuario delle forme del verbo latino.
48. Il Consulente Amministratore.
49. La costruzione geometrica delle ombre.
. Statica grafica.
. Prontuario delle forme del verbo tedesco.
. Monete d'oro e d'argento legali e false.
. Prontuario delle forme del verbo francese.
. Pile per usi domestici.
. Accumulatori per usi domestici.
. Lo Stato nella Sociologia Spenceriana.
. Curiosità e sofismi matematici.
. La Luce Elettrica domestica.
. Storia Parlamentare della III Repubblica di Francia.
560. Disinfezione e disinfettanti.
561. Come coniug. i verbi inglesi
562. Storia del popolo arabo.
563. L'aritmetica per gli adulti. - Parte I.
564. Id., id. - Parte II
565. Id., id. - Parte III
566. I fondamenti della Geometria di posizione.
567. Beethoven, la sua vita e le sue opere.
568. La lotta greco-romana.
569. La Cinematografia.
570. Canottaggio e nuoto.
571. Nozioni di idraulica.
572. Foot-ball.
573. Compendio di letteratura indiana.
574. Francesco Giuseppe e la storia di Casa d'Absburgo.
575. Applicazioni algebriche alla geometria piana e solida.
576. Dizionario biblico. — Vol. I. - Parte Geografico-Storica.
577. Idem. — Vol. II. - Parte Religiosa.
578. Trento e Trieste.
579. I terremoti e la sismologia.
580-581. Manualetto indicatore dei servizi del telegrafo e del telefono.
582. Storia del Messico.
583. La Marina Militare Italiana nel 1915.
584. Storia del Belgio.
585. Leggi, usi e convenzioni della guerra moderna.
586. Storia di Spagna.
587. L'Esercito Italiano.
588-589. Iniziamento alla teoria dei numeri.
590. Geometria non-euclidea.
591. Il Dispotismo.
592-593. Tesi di calcolo letterale.
594. Allevamento del coniglio e degli animali da cortile.
595. Storia dell'Albania fino al 1910.
596. Le caldaie a vapore marine.
597-598. Il mare Adriatico.
599-600. Panificazione razionale moderna.
601. La motocicletta e il motociclista.
602. Elem. di telegrafia senza filo.
603. Dizionarietto Geografico Etimologico.
604. L'automobile.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

605. L'Orlando furioso esposto al [popolo
606. Idem. - Parte II.
607. Idem - Parte III.
608. Idem. - Parte IV.
609. Idem. - Parte V.
610-611. La storia delle razze caval-
612-613. Idee di Cosmogonia [line.
614. La sifilide.
615. La blenorragia
616. La Casa di Savoia [logia.
617. Frammenti di storia dell'astro-
618-619. La pesca meccanica.
620. Le malattie professionali
621. Istruzione orale dei sordomuti.
622-623. Lo sviluppo storico delle forme animali. [derna cura.
624. La tisi polmonare e la sua mo-
625. G. B. Molière e le sue opere.
626. L'essiccazione delle patate e di altri generi commestibili.
627. Il gergo nella società, nella storia, nella letteratura.
628. Camillo Benso di Cavour
629. Conferenze popolari sulla tubercolosi.
630. Storia della scrittura.
631. Il Benzolo, il Toluolo e gli esplosivi derivanti.
632-633. Fari e segnali marittimi.
634. Carlo Goldoni. [materiali
635. Nozioni sulla resistenza dei
636. Dizionario degli Autori italiani, latini, greci.
637. Sezioni coniche.
638-639. L'industria del freddo.
640-641. Nozioni e curiosità araldiche (con illustrazioni).
642. La fabbricazione dell'acciaio al forno Martin.
643-644. Prontuario dantesco.
645-646. Calcolo infinitesimale. Parte I, *Calcolo differenziale*.
647. Calcolo infinitesimale. - Parte II, *Calcolo integrale*.
648. Elementi di costruzione in cemento armato.
649. La patria dell'uomo.
650. Compendio di letteratura ita-
651. I motori d'aviazione. [liana
652. Malattie e rimedi.
653. Formulario per il tornito meccanico. [materia
654. Esercizi sulla resistenza d
655. Federico Mistral e «Mirella»
656. Galileo Galilei.
657. Sunti di didattica
658. Gli ingranaggi. [popolo
659-660. I Promessi Sposi esposti al
661. Misure elettriche pratiche.
662. I motori a scoppio nell'agricoltura.
663. I contatori elettr. a induzione
664-665. Costruzioni navali in ferro.
666-667. Piccolo vocabolario commerciale.

VOLUMI RINNOVATI O SOSTITUITI:

5. Storia d'Italia dalle origini ai nostri giorni.
22. Botanica.
43. Credenze e superstizioni antiche e moderne.
56. Il giuoco della dama (regole e problemi).
75. Storia della Russia dalle origini ai nostri giorni.
78. Radiotelegrafia-radiotelefonia.
84. Storia della Germania dalle origini ai nostri giorni.
85. Storia della letterat. italiana.
86. La canzone d'Orlando riassunta ed esposta al popolo.
87. Storia della Grecia dal 1740 ai nostri giorni.
117. Gli avvolgimenti dell'indotto nelle macchine a corrente continua.
169. Storia della letterat. tedesca.
346. Compendio di storia moderna (1492-1815). [cazioni.
350. I principî delle radiocomuni-